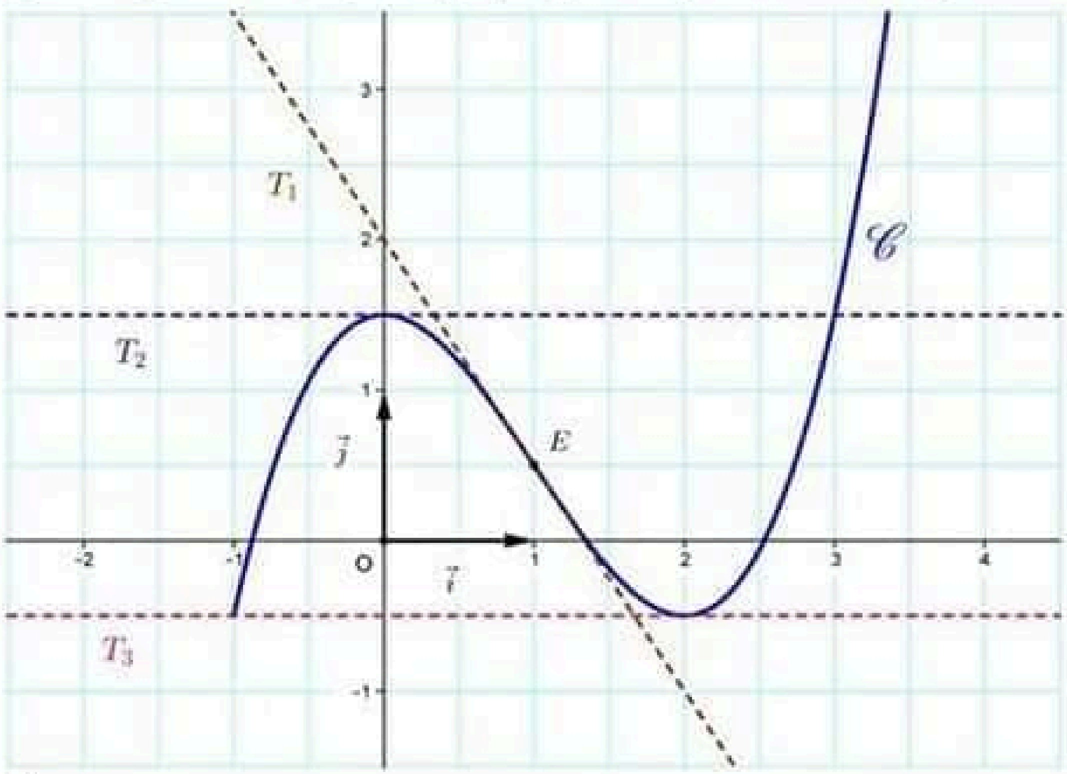
Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3-3x+2$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) a) Montrer que f est dérivable sur IR et Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Préciser les extremums de f et donner leurs natures
3) Montrer que le point $A(0,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$
4) Tracer $\mathscr{C}$
5) Soit la restriction de f sur $[1,+\infty[$
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$
   b) Calculer $f(2)$, en déduire $(f^{-1})'(4)$
6) a) Montrer que f possède des primitive sur IR
   b) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en -2

Exercice n° 6

La courbe $\mathscr{C}$ donnée dans la figure ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $[-1,+\infty[$
Cette courbe est tracée dans un repère orthonormé.
On a représenté également les tangentes T_1, T_2 et T_3 à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives 1, 0 et 2



Partie A

Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$
3) Dresser le tableau de variation de f

Partie B

La fonction f étudiée dans la partie A est définie par $f(x)=\frac{1}{2}(x^3-3x^2+3)$

1) Etudier la continuité de f sur $[-1,+\infty[$
2) a) Justifier pourquoi l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0,2]$
   (une justification graphique ne sera pas acceptée)
   b) Montrer que $1{,}34\le\alpha\le1{,}35$

3) a) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $f(x)-f(-1)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2$

   b) La fonction f est-elle dérivable à droite en -1 ? justifier

4) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée f'

Exercice n° 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{-3x^2+5x+4}{x+1}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

   b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

   c) Montrer que $f(x)=-3x+8-\frac{4}{x+1}$

   d) Montrer alors que $D : y=-3x+8$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$

2) a) Déterminer la fonction dérivée de f

   b) Dresser le tableau de variation de f

3) Déterminer une équation da la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0

4) Déterminer les coordonnées des points de $\mathscr{C}$ pour lesquels $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-2x$

Exercice n° 8

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Montrer que $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$

   b) Vérifier que $\Delta : x=1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe possède une asymptote horizontale Δ' en $+\infty$

3) a) Montrer que f est dérivable sur $IR \setminus \{-1,1\}$ et que $f'(x)=-\frac{3+3x^2}{(x^2-1)^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$

4) Tracer $\mathscr{C}$, Δ et Δ' dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice n° 9

Soit f la fonction définition sur $Df = IR \setminus \{2\}$ par $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$

1) Déterminer la fonction f' dérivée de f

2) a) Etudier les limites de f aux bornes de Df et En déduire l'existence d'asymptotes horizontales ou verticales à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$

   b) Dresser alors le tableau de variation de f sur Df

3) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

   c) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ

4) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède deux tangentes T et T' parallèles à la droite $\mathscr{D}: y=-3x$

5) Tracer $\mathscr{C}$, T, T' et Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice n° 10

Soit f une fonction définie sur $]-1,+\infty[$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique. L'axe des abscisses est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1

1) Déterminer $f'(1)$ et $f(1)$

2) La fonction f est de la forme $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x+1}$ où a et b sont deux réels

   a) Montrer que $f'(x)=\frac{ax^2+2ax+b-1}{(x+1)^2}$

   b) En déduire les valeurs de a et b

3) Pour la suite, on suppose que $a=1$ et $b=-2$

a) Déterminer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat

b) Montrer que pour tout réel x de Df, $f(x) = x-3+\dfrac{4}{x+1}$

c) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation

d) Etudier les variations de f

e) Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice n° 11

On considère la fonction f définie sur $IR\setminus\{3\}$ par $f(x) = ax+b+\dfrac{1}{3-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer a et b pour que $\mathscr{C}$ passe par $A(2,1)$ et admette une tangente horizontale en A.
2) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ dont on donnera une équation
3) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$
4) Etudier la limite en 3 de $f(x)$
5) Dresser le tableau de variation de f
6) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

Exercice n° 12

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3+x^2+6$

1) Etudier les variations de g
2) En déduire que l'équation $g(x)=0$ possède une seule solution a dans IR et que $-3 < a < -2$
3) Etudier le signe de $g(x)$ pour $x \in IR$

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x) = x-1+\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$

1) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)}{x^4}g(x)$

   b) En déduire les variations de f
2) Donner une équation de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse 2
3) Tracer T et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé

Exercice n° 13

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On sait que $f(2) = -4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie A

1) Soit F la primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F

   a) Donner le tableau de variations de la fonction F

   b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2,3)$. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A
2) Tracer la courbe représentative d'une fonction qui satisfait les conditions obtenues à la question précédente, dans un repère orthonormé du plan
3) Placer le point A ainsi que le point d'abscisse 4 et tracer les tangentes à la courbe en ces points

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{16}{x^3}$

1) a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$

   b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -4x + 11$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

b) Montrer que la courbe de la fonction F admet pour asymptote la droite $\Delta : y = x - 7$

Exercice n° 14

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier le sens de variation de la fonction f
2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0
3) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$?
4) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ qui passe par le point $A(2,3)$?

Exercice n° 15

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat
2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{(1 + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on précisera. On notera $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5) Donner le domaine de continuité et de dérivabilité de f^{-1}
6) Calculer $f(4)$ et en déduire $f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$
7) On pose $g(x) = f(x) - x$
   a) Montrer que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1[$
   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α
   c) Montrer que $0 < \alpha < 1$
8) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice n° 16

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \cos^2(2x) - 2\cos^2 x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1) a) Etudier la parité de f
   b) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie
   c) En déduire, en justifiant, qu'il suffit d'étudier f sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2) a) Démontrer que $f'(x) = 4\sin x \cos x (4\sin^2 x - 1)$ pour tout $x \in I$
   b) Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variation sur I
3) a) Résoudre dans IR l'équation $4X^4 - 6X^2 + 2 = 0$
   b) En déduire la résolution de $f(x) = -1$ dans I. (On pourra poser $X = \cos x$)
4) Tracer $\mathscr{C}$

Exercice n° 17

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + 2\sin x + \sin(2x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ On pourra prendre comme unités 1 cm sur $(O, \vec{j})$ et $\frac{6}{\pi}$ cm sur $(O, \vec{i})$ (c'est-à-dire que π est représenté par 6 cm sur l'axe des abscisses)

1) a) Déterminer la période de f
   b) Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$
2) a) Montrer que $f'(x) = 2(1 + \cos x)(2\cos x - 1)$

b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0,\pi]$

3) Tracer $\mathscr{C}$

Exercice n° 18

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\cos(2x)-2\cos x$ et on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer le signe de $g(x)=(1-2\cos x)\sin x$ en fonction des valeurs de x sur l'intervalle $[0,\pi]$
2) a) Etudier la parité de f
   b) Montrer que f est périodique de période 2π . En déduire un intervalle d'étude approprié
3) Etudier les variations de f sur l'intervalle considéré
4) Tracer $\mathscr{C}$